

แผนการจัดการเรียนรู้

รายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6

หน่วยการเรียนรู้ ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน

เวลา 1 ชั่วโมง

ผลการเรียนรู้

ตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่กำหนดให้

สาระสำคัญ

ลิมิตของฟังก์ชัน

สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายแล้ว จะเรียก L_1 ว่า “ลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย” เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$

ถ้า $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาแล้ว จะเรียก L_2 ว่า “ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวา” เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$

ถ้า $L_1 = L_2$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ มีค่า และ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 = L_2$

แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ไม่มีค่า

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้

สาระการเรียนรู้

ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

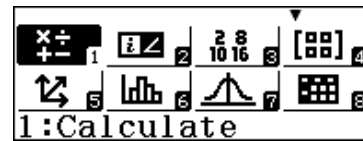
กระบวนการจัดการเรียนรู้

1. ทบทวนความรู้เดิมเรื่องการหาค่าของฟังก์ชัน จากนั้นครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้
2. ครูให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม 3 – 5 คน เพื่อทำใบกิจกรรมที่ 1 โดยให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz ในการสำรวจคำตอบและให้นักเรียนในกลุ่มร่วมกันอภิปรายถึงข้อค้นพบในแต่ละข้อในใบกิจกรรมที่เกิดขึ้นเพื่อตอบคำถามท้ายข้อในแต่ละข้อ (ขั้นการสำรวจและหาความสัมพันธ์)

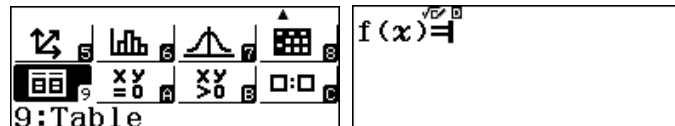
3. ครูให้นักเรียนนำเสนอผลจากการอภิปราย จากใบกิจกรรม ดังนี้

- จากใบกิจกรรมข้อที่ 1 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ทำได้ดังนี้

1) กดปุ่ม MENU

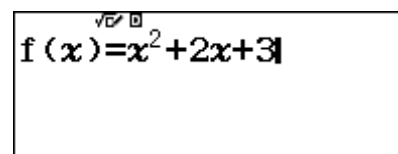


2) เลือกเมนู 9:Table

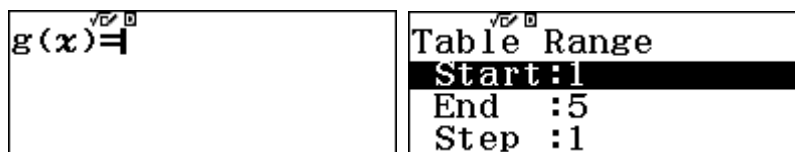


3) กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 3$ โดยกด

$[x] [x^2] [+] [2] [x] [+] [3]$



4) กดปุ่ม $\equiv \equiv$

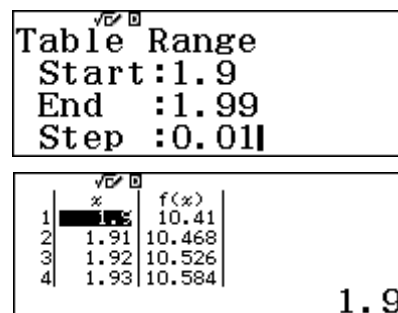


5) ระบุค่า Start เป็น 1.9 และค่า End เป็น 1.99

และ Step เป็น 0.01 โดยกด

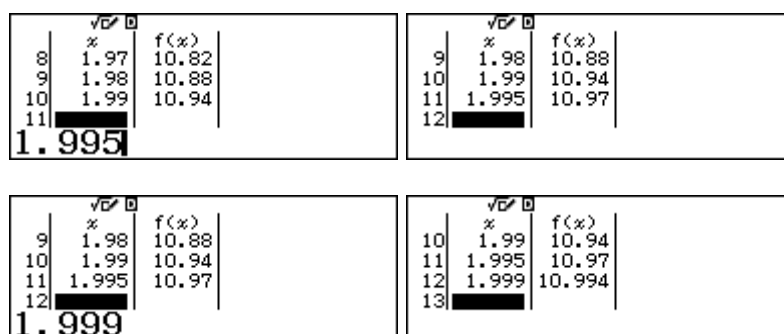
$[1] [\cdot] [9] [\equiv] [1] [\cdot] [9] [9] [\equiv]$
 $[0] [\cdot] [0] [1] [\equiv]$

จากนั้นกดปุ่ม \equiv



6) สามารถหาค่า $f(x)$ เมื่อ x เป็นค่าอื่น ๆ นอกเหนือจากในตารางโดยป้อนค่า x ที่ต้องการลงไป

และกดปุ่ม \equiv



7) หาค่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ โดยกด **AC** **=** **=**

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$g(x) = 1$$

Table Range		
Start:	1.9	
End	:1.99	
Step	:0.01	

8) ระบุค่า Start และค่า End และ Step ของ x
เป็น 2.1, 2.01 และ 0.01 ตามลำดับ โดยกด

2 **.** **1** **=** **2** **.** **0** **1**
= **0** **.** **0** **1** **=**

จากนั้นกดปุ่ม **=**

Table Range		
Start:	2.1	
End	:2.01	
Step	:0.01	

	x	f(x)
1	2.1	11.61
2	2.09	11.548
3	2.08	11.486
4	2.07	11.424

2.1

9) สามารถหาค่า $f(x)$ เมื่อ x เป็นค่าอื่น ๆ นอกเหนือจากในตารางโดยป้อนค่า x ที่ต้องการลงไป
และกดปุ่ม **=**

	x	f(x)
8	2.03	11.18
9	2.02	11.12
10	2.01	11.06
11	2.005	

2.005

	x	f(x)
9	2.02	11.12
10	2.01	11.06
11	2.005	11.03
12		

	x	f(x)
9	2.02	11.12
10	2.01	11.06
11	2.005	11.03
12	2.001	

2.001

	x	f(x)
10	2.01	11.06
11	2.005	11.03
12	2.001	11.006
13		

- จากใบกิจกรรมข้อที่ 1

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1.9 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 11

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 11$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 2.1 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 11

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 11$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 11$ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

- จากใบกิจกรรมข้อที่ 2

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 4.9 และมีค่าเข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 10

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 10$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 5.1 และมีค่าเข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 10

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 10$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 10$ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)
- จากใบกิจกรรมข้อที่ 3

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 3.9 และมีค่าเข้าใกล้ 4 ค่าของ $f(x)$ เท่ากับ -1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -1$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 4.1 และมีค่าเข้าใกล้ 4 ค่าของ $f(x)$ เท่ากับ -1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = -1$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -1$ (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)
- จากใบกิจกรรมข้อที่ 4

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.9 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 1.1 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ไม่มีค่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)
- จากใบกิจกรรมข้อที่ 5

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1.9 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ เท่ากับ 1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 2.1 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$ เท่ากับ -1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ไม่มีค่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

- จากใบกิจกรรมข้อที่ 6

เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก -0.1 และมีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ -1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 0.1 และมีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$ เข้าใกล้ 1

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

ข้อค้นพบคือ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ไม่มีค่า (ขั้นสรุปความสัมพันธ์)

4. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะที่ 1 (ขั้นการฝึกทักษะ)

สื่อการเรียนรู้/แหล่งเรียนรู้

1. เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz
2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน
3. แบบฝึกทักษะที่ 1 เรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

การวัดผลและประเมินผล

1. ประเมินจากการทำใบกิจกรรมที่ 1
2. ประเมินจากการทำแบบฝึกทักษะที่ 1
3. ประเมินจากการตอบคำถามของนักเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1

เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง ให้นักเรียนใช้เครื่องคำนวณวิทยาศาสตร์ CASIO รุ่น fx-991EX Classwiz เติมค่าของฟังก์ชันให้สมบูรณ์ พร้อมทั้งพิจารณาว่าลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อมีค่าหรือไม่ ถ้ามีจงหาลิมิต

1) $f(x) = x^2 + 2x + 3, \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	$f(x)$
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	
1.99999	
1.999999	
1.9999999	
1.99999999	
1.999999999	

ตาราง A

x	$f(x)$
2.1	
2.01	
2.001	
2.0001	
2.00001	
2.000001	
2.0000001	
2.00000001	
2.000000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1.9 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 2.1 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

2) $f(x) = \frac{x^2 - 25}{x - 5}, \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

x	$f(x)$
4.9	
4.99	
4.999	
4.9999	
4.99999	
4.999999	
4.9999999	
4.99999999	

ตาราง A

x	$f(x)$
5.1	
5.01	
5.001	
5.0001	
5.00001	
5.000001	
5.0000001	
5.00000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 4.9 และมีค่าเข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 5.1 และมีค่าเข้าใกล้ 5 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

3) $f(x) = \frac{x-5}{|x-5|}$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

x	$f(x)$
3.9	
3.99	
3.999	
3.9999	
3.99999	
3.999999	
3.9999999	
3.99999999	

ตาราง A

x	$f(x)$
4.1	
4.01	
4.001	
4.0001	
4.00001	
4.000001	
4.0000001	
4.00000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 3.9 และมีค่าเข้าใกล้ 4 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 4.1 และมีค่าเข้าใกล้ 4 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

4) $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

x	$f(x)$
0.9	
0.99	
0.999	
0.9999	
0.99999	
0.999999	
0.9999999	
0.99999999	

ตาราง A

x	$f(x)$
1.1	
1.01	
1.001	
1.0001	
1.00001	
1.000001	
1.0000001	
1.00000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.9 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 1.1 และมีค่าเข้าใกล้ 1 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

5) $f(x) = \frac{|2-x|}{2-x}$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

x	$f(x)$
1.9	
1.99	
1.999	
1.9999	
1.99999	
1.999999	
1.9999999	
1.99999999	
1.999999999	

ตาราง A

x	$f(x)$
2.1	
2.01	
2.001	
2.0001	
2.00001	
2.000001	
2.0000001	
2.00000001	
2.000000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1.9 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 2.1 และมีค่าเข้าใกล้ 2 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

6) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

x	$f(x)$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
-0.00001	
-0.000001	
-0.0000001	
-0.00000001	

ตาราง A

x	$f(x)$
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	
0.00001	
0.000001	
0.0000001	
0.00000001	

ตาราง B

จากตาราง A เมื่อ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นจาก - 0.1 และมีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots$

จากตาราง B เมื่อ $f(x)$ มีค่าลดลงจาก 0.1 และมีค่าเข้าใกล้ 0 ค่าของ $f(x)$

จึงสรุปได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots$

จงสรุปข้อค้นพบ.....

แบบฝึกทักษะที่ 1

เรื่อง การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

คำชี้แจง จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1) $f(x) = x^2 - 5x + 3$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

3) $f(x) = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

4) $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

5) $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$